

Análisis multivariante del Índice de Productividad del Trabajo de América Latina y la Unión Europea por medio de Biplot usando R

Multivariate analysis of the Labor Productivity Index of Latin America and the European Union through Biplot using R

Willin Álvarez Irausquin

Palabras clave: Índice de Productividad del Trabajo, CEPAL, Biplot, software R

Key words: Labor Productivity Index, CEPAL, Biplot, software R

RESUMEN

En este artículo se analiza el índice de productividad del trabajo proporcionado por la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL) para la última década del siglo XX y comienzos del siglo XXI, para lograr este objetivo fue implementado un Biplot usando software Libre R, aquí se describen las funciones creadas a tales efectos. El Biplot fue capaz de captar las variaciones de los índices de productividad del trabajo a través de los años de estudio, realizando una buena representación para la mayoría de los países. Los países que resultaron con mejores índices de productividad del trabajo son Polonia y Perú; mientras, que Venezuela y Ecuador fueron los países con peores índices a comienzo de la década del siglo XXI.

ABSTRACT

This paper analyzes the labor productivity index provided by the Economic Commission for Latin America and the Caribbean (ECLAC) for the last decade of the 20th century and the beginning of the 21st century, to achieve this goal, A Biplot was implemented using Free R software, for this the functions created for this purpose are described. The Biplot was able to capture the variations of labor productivity indexes through the years of study, making a good representation for most countries. The countries that showed the best indices of labor productivity are Poland and Peru; while Venezuela and Ecuador are the countries with the worst indices at the beginning of the 21st century.

INTRODUCCIÓN

La productividad del trabajo es uno de los factores que deben considerarse para el crecimiento de la economía de un país (Mulder *et al.*, 2016). Investigadores como la Hall & Jones (1999) consideran que el

50% de las diferencias en el crecimiento entre los países es explicado por las diferencias en sus productividades, sustentan también, que en los países más desarrollados la mejora de la

productividad explica más de tres cuartas partes del crecimiento económico.

Tal como lo expresan Mulder *et al* (2016): “La productividad no sólo mide la eficiencia del uso de cada uno de los distintos factores de producción (trabajo, capital y recursos naturales) por separado, sino también del desempeño del conjunto de estos medios de producción mediante la llamada productividad total de los factores (PTF). A su vez, este indicador determina en gran medida la competitividad internacional de los países...” (p.4). La productividad del trabajo gana su importancia entonces en ser un índice que permite determinar el grado de competitividad de las naciones.

El estudio de la productividad del trabajo, tiene una gran importancia para América Latina y el Caribe, ya que esta se ha mantenido por debajo de la media mundial, según lo expresado por Torres y López (2014): “A pesar de que la productividad laboral en la región se recuperó rápidamente de la caída sufrida en 2009, ha continuado creciendo por debajo de la media mundial. Además, estimaciones recogidas en el *Informe sobre Tendencias Mundiales del Empleo 2014* sugieren que esta tendencia continuará a lo largo de los próximos cuatro años.” (p.4). En este sentido, estudiar el comportamiento del índice de productividad en la última década del siglo anterior y la primera del siglo presente puede brindar una visión de cómo venía América Latina y el Caribe en

cuanto competitividad con los países que la conforman y los europeos, y por supuesto, hacia dónde va.

Por otro lado, los retos para el ingeniero industrial son cada vez mayores, su visión debe estar encaminada a la actualidad y las nuevas tendencias, tal como expresan Acevedo y Linares (2012, p.16): “...El ingeniero industrial va ampliando su alcance hacia segmentos de servicios, sectores primario-extractivos, mineros, energéticos, agrícolas, ganaderos, también a la consultoría con enfoque de negocios basado en la productividad. Respecto al entorno, el ingeniero conforme va ampliándose el campo de su tarea ha de aplicar las razones de productividad y eficiencia”. En respuesta a estos el ingeniero industrial ha experimentado cambios, por cuanto ahora no solamente debe realizar actividades de gestión de recursos y personas, sino que ha devenido en nuevas competencias para realizar nuevos roles, hoy día se aprecia como un analista y diseñador de procesos y se encamina a la decisión estratégica, la gestión integral y global de sistemas productivos (*ob. cit.*). En este desarrollo de nuevas competencias del ingeniero industrial se evidencia la necesidad del análisis de datos multivariantes, tal como se testimonia en trabajos como los de Mejías (2005), Álvarez y García (2008), García *et al.* (2008), López *et al.* (2008) y más recientes Arciniegas *et al.* (2017), Mejías *et al.* (2017), entre otros. En el interés del analista de datos multivariantes ha estado

presente el estudio de las técnicas que permiten la reducción de la dimensión, una de estas técnicas nace de las manos de Gabriel (1971), quien realizó los primeros aportes en el desarrollo de los métodos Biplot siendo originalmente su objetivo principal proporcionar la representación gráfica aproximada en baja dimensión de una matriz de datos rectangular. Primeramente, para ello se aproxima la matriz de datos a través de la descomposición en valores singulares, para luego realizar una factorización Biplot en marcadores fila (vectores filas) y columna (vectores columnas) que permita la representación gráfica de dichos marcadores, la característica principal del producto interior es reproducir aproximadamente cada elemento en la matriz de datos.

Las propiedades de los marcadores fila y columna en la representación dependen de la factorización Biplot elegida, caracterizada por la métrica introducida ya sea en el espacio de las filas o de las columnas de la matriz de datos.

Gabriel propone dos tipos: el GH-Biplot y el JK- Biplot. En el GH-Biplot se consigue alta calidad en la representación de las variables y baja calidad para los individuos, mientras que, en el JK-Biplot sucede lo contrario.

Existen muchas bases de datos que necesitan ser análisis con técnicas que permitan la reducción de la dimensión. Por ejemplo, la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL) es una de las cinco comisiones regionales de

las Naciones Unidas y su sede está en Santiago de Chile, sus objetivos son contribuir al desarrollo económico de América Latina, coordinar las acciones encaminadas a su promoción y reforzar las relaciones económicas de los países entre sí y con las demás (<https://www.cepal.org/es>), esta organización crea bases de datos estadísticas de las economías de las naciones de América Latina y el Caribe; así como, de la comunidad europea. Por otro lado, en la actualidad hay una fuerte tendencia al estudio de datos estadísticos usando el Lenguaje R, esta poderosa herramienta nos permite realizar análisis estadísticos con una de las librerías libres más grandes del mundo, en este ensayo se muestra cómo usar R para analizar matrices de datos de la CEPAL, que son de gran importancia en la ingeniería industrial.

Primeramente, se describe cómo se puede interpretar una matriz de datos a través de un plano factorial tal como se realiza en componentes principales, paso seguido, se facilitan unas funciones que se ejecutan en R para realizar Biplots Clásicos. Para iniciar el estudio se toma la proporción de personas que confían en la calidad del gasto público medidas en los años 2003, 2005 y 2011 por la CEPAL. Posteriormente, se pasa a un importante tema para la ingeniería industrial el análisis del Índice de productividad del trabajo de América Latina y la Unión Europea medido en la última década del siglo XX y última década del siglo XXI, lo

cual permite hacer una comparación de los países antes y después de estas décadas por medio de los Biplot generados con R.

Los Biplots Clásicos

Los Biplots desde que Gabriel en 1971 dio los primeros pasos, han evolucionado, Cárdenas y Galindo (2004), citan importantes trabajos al respecto, por ejemplo, se habla de cómo Galindo (1985; 1986) demuestra que es posible con una conveniente selección de los marcadores, hacer que ambos conjuntos se puedan representar simultáneamente sobre un mismo sistema de coordenadas cartesianas, con la misma calidad en la representación, tanto para las filas como para las columnas, dando así una alternativa a los Biplots Clásicos. Galindo denomina a este tipo de Biplot, HJ, en el cual se eligen los marcadores en la misma forma que Gabriel, pero permitiendo, además, una representación gráfica en la misma forma que el análisis de correspondencias (Benzecri, 1982).

Cárdenas *et al.* (2007), brinda una información muy detallada de los métodos Biplot desde 1971 con la iniciativa de Gabriel, se refiere al lector a esta lectura. Posteriormente, en 2008 Álvarez y García, muestran una aplicación edafológica de los Biplot de regresión en rango reducido para representar ecuaciones de pedotransferencias. Álvarez (2009), propone la utilización de los PLS y la descomposición en valores singulares, derivando un procedimiento de

estimación que no es afectado por la multicolinealidad, más tarde en el trabajo de Álvarez & Cárdenas (2010), definen al Biplot de regresión en rango reducido bajo la perspectiva de los Biplot generalizados, en este trabajo se trata al GH Biplot de RRR sus propiedades geométricas y su interpretación.

Representaciones Biplots

Los Biplots introducidos por Gabriel en 1971, son representaciones conjuntas en un gráfico de las filas y columnas de una matriz. Cuando se considera a una matriz de datos, el Biplot es un gráfico conjunto de las observaciones y las variables (Peña, 2002). La representación se obtiene en los fundamentos teóricos de la Descomposición en Valores Singulares (DVS) de una matriz (Eckart & Young, 1936). En tal sentido, toda matriz W de $n \times p$ puede descomponerse como:

$$W = UD V \quad (1)$$

donde U de $n \times p$ contiene en sus columnas los vectores propios asociados a los valores propios no nulos de la matriz $W W'$, D es una matriz diagonal de orden p que contiene las raíces cuadradas de los valores propios no nulos de $W W'$ o $W'W$ y V es una matriz ortogonal de $p \times p$ que tiene por columnas los vectores propios de $W'W$. Las matrices U y V satisfacen la propiedad $U'U=I$ y $V'V=I$.

La DVS proporciona la mejor aproximación de rango q de la matriz W de rango r , con $q < r$, en el sentido de los

mínimos cuadrados (Householder & Young, 1938), esta aproximación se realiza tomando los q mayores valores propios de la matriz D y los correspondientes vectores propios de W W' y $W' W$, y reconstruyendo a W mediante el producto:

$$W \approx U_q D_q V_q' \quad (2)$$

donde U_q de $n \times q$ contiene las primeras q columnas de U , mientras que V_q de $p \times q$ comprende las primeras q columnas de V , y D_q es una matriz diagonal de los q valores propios asociados a U_q y V_q .

Específicamente, si el interés es la representación Biplot de una matriz W consiste en aproximarla mediante la DVS de rango dos, en consecuencia, si se toma $q = 2$, la aproximación en (2) queda de la siguiente manera:

$$W \approx U_2 D_2 V_2' \quad (3)$$

Marcadores filas y columnas

Descomponiendo la matriz D_2 de (3), se puede factorizar la aproximación de la matriz de datos W en el producto de dos matrices, o sea:

$$W \approx U_2 D_2^c D_2^{1-c} V_2' = FC' \quad (4)$$

donde

$$F = U_2 D_2^c \quad C = V_2 D_2^{1-c} \quad (5)$$

La matriz F representa las n filas de la matriz W en un espacio de dimensión dos; mientras que la matriz C representa

en el mismo espacio las columnas de la matriz. Usualmente a las matrices F y C , se les llama matriz de marcadores filas y de marcadores columnas, respectivamente. Al producto FC' indicado anteriormente se le llama factorización Biplot (Gabriel, 1971). Al denotar la i -ésima fila de F como f_i' y la j -ésima columna de C' por c_j puede verse que la factorización Biplot garantiza la representación gráfica aproximada de la matriz, ya que cada w_{ij} puede reescribirse de la siguiente forma:

$$w_{ij} = f_i' c_j \quad (i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,p) \quad (6)$$

Es decir, el Biplot de la matriz W se define como la representación gráfica sobre un plano (para la dimensión 2) de marcadores fila $f_i = (f_{i1}, f_{i2})'$ y marcadores columna $c_j = (c_{j1}, c_{j2})'$, ambos vectores de dos elementos cada uno, tal que para cada i y cada j (Cárdenas y Galindo, 2004):

$$w_{ij} = f_i' c_j = f_{i1} c_{j1} + f_{i2} c_{j2} \quad (7)$$

Vicente-Villardón en 1992, establece que en determinados tipos de Biplots, las longitudes y los ángulos de los vectores que representan a las variables, se interpretan en términos de variabilidad y covariabilidad respectivamente. Las relaciones entre individuos y variables se interpretan en términos del producto escalar, es decir, en términos de las proyecciones de los puntos (representación de los individuos) sobre

los vectores (representación de las variables).

Para ilustrar estas ideas, se tomará como ejemplo la representación Biplot (Figura 1) para una matriz de datos W de 25×10 , llamados EUROCALI por Peña (2002, p.506), Las observaciones corresponden a países europeos, y las variables al porcentaje de consumo de proteínas que cada tipo de alimento proporciona. La variable "N", es el nombre o la etiqueta que se le ha dado al consumo de nueces, y en la matriz de datos representa a la

variable o columna 8, mientras que la fila 10 denota al país Grecia. Si se está interesado en el consumo de nueces en Grecia se proyecta perpendicularmente (ángulo de 90°) sobre el rayo vector que representa al consumo de nueces tal como puede verse en la figura 1. En esta representación el elemento $w_{10,8}$ de la matriz W se puede aproximar por:

$$W_{10,8} \approx f_{10}' \cdot c_8 = \| \text{Proy}(f_{10} / c_8) \| \cdot \| c_8 \| \quad (8)$$

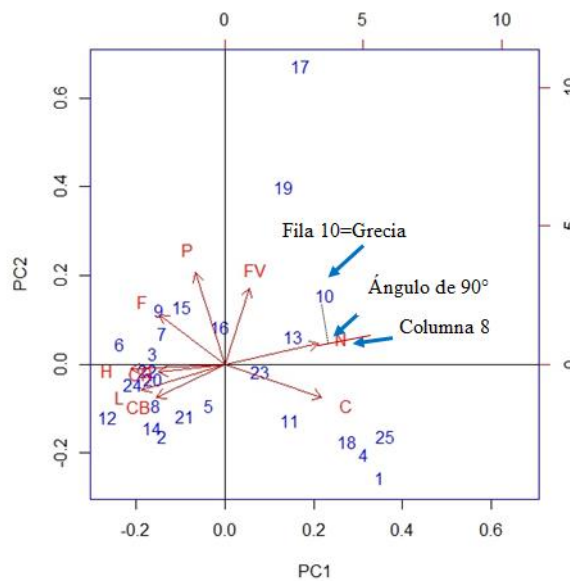


Figura 1: Biplot para una matriz de datos de 25×10

Mientras que, el ángulo entre las variables, por ejemplo, el ángulo entre "F" y "P", aproxima la relación lineal que existe entre el porcentaje de consumo de fécula y pescado. Además, la norma de "CB", aproxima la varianza de la del consumo de proteínas de carnes blancas.

Los Biplots Clásicos

Dependiendo de los valores dados al escalar c en la factorización (5), se pueden obtener los Biplots de Gabriel (1971), el JK (cuando $c = 1$), el GH (cuando $c = 0$) y el SQRT (cuando $c = 0.5$). En cada uno de

ellos, los marcadores filas y columnas tienen propiedades que los caracterizan, estos permiten considerando las propiedades geométricas del producto interno entre ellos, reconstruir con alta calidad la representación de los datos originales, y aproximar gráficamente el orden de los individuos y/o la variabilidad y correlación de las variables, a través de las proyecciones de los marcadores filas f_i sobre los marcadores columnas c_j , y de la longitud y el ángulo que forman los ejes Biplot.

Biplot Clásico bajo R

R es un Lenguaje de programación ideado especialmente para estudios estadísticos, es manejado a través de una consola en la que se introduce el código propio de su lenguaje para obtener los resultados deseados. Inicialmente, fue diseñado por Robert Gentleman y Ross Ihaka, miembros del departamento de estadística de la Universidad de Auckland, en Nueva Zelanda.

R está elaborado en versión de software libre, lo que ha contribuido a su desarrollo y evolución por los aportes de muchos innovadores, el código R está bajo las condiciones de licencia de GNU-GPL GNU. A continuación se muestran algunas funciones básicas para la implementación de los Biplots Clásicos usando R, el primer paso para la realización de un Biplot es la selección de la base de datos, para ello se han escogido de la base de datos proporcionada por la CEPAL (<https://www.cepal.org/es/datos-y-estadisticas>) dos matrices de datos la

primera corresponde a la proporción de personas que confían en la calidad del gasto público medidas en los años 2003, 2005 y 2011

(<http://interwp.cepal.org/sisgen/ConsultaIntegrada.asp?idIndicador=2052&idioma=e>).

Estos datos serán utilizados aquí para ilustración de las rutinas y funciones que se han implementado con R, además, estos datos pueden descargarse fácilmente y guardarse en el computador para el análisis posterior, en esta oportunidad se ha llamado "Y" a todas las matrices de datos que se utilizarán en este ensayo, la instrucción en R que se usa para definir la matriz de estudio es la siguiente:

```
Y<-read.csv('c:/financiamiento.csv', header=T)
```

Para dar una mirada inicial de los datos usamos la instrucción *head* (Y), la cual nos proporciona la siguiente información:

```
head(Y,3)
```

```
A.03 A.05 A.11
```

```
1 18 24 29
```

```
2 13 15 24
```

```
3 19 13 14
```

Si el interés del investigador está saber los atributos de esta matriz de datos se puede usar *attributes* (Y), que facilitará el los nombres de las variables (A.03, A.05, A.11), la clase de datos (en esta caso data.frame) y los nombres de las filas o individuos.

`attributes(Y)`

`$names`

`[1] "A.03" "A.05" "A.11"`

`$class`

`[1] "data.frame"`

`$row.names`

`[1] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
15 16 17 18`

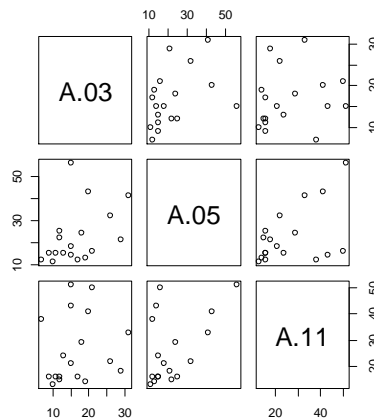
Como fase exploratoria el investigador puede estar interesado la relación lineal

entre las variables y los diagramas de dispersión de las variables, con la finalidad de determinar si los datos son "buenos" para realizar un biplot

`round(cor(Y),2)`

	A.03	A.05	A.11
A.03	1.00	0.42	0.16
A.05	0.42	1.00	0.49
A.11	0.16	0.49	1.00

`plot(Y)`



Funciones para realizar un análisis Biplot

En R se utiliza la instrucción `function(x) {}` para crear una fórmula o grupo de fórmulas que facilitan los cálculos que al final pueden ser un simple número, un vector, una gráfica, una lista o un mensaje, en este artículo se han elaborado unas funciones que permiten realizar un análisis biplot bajo R. La primera función creada para este artículo permite realizar transformaciones de los datos, se aclara que, por defecto se consideran los datos sin ninguna transformación o datos

brutos, pero si se está interesado en centralizar los datos con respecto a la media o algún otro valor, o si se está interesado en estandarizar los datos, se puede recurrir a la función que se ha convenido llamar "Función de Transformación" la cual presenta las opciones "Centrar" o "Estandarizar"

1)Función Transformaciones

1.1 Centrar


```

-----
Centrar =function(x)
{x=x-
t(matrix(rep(apply(x,2,mean),times=nro
w(x)),nrow=ncol(x)))
return(x)}
-----

```

1.2 Estandarizar

```

-----
estandarizar=function(x)
{x=data.matrix(x)
x=Centrar(x)#j=matrix(data = 1, nrow
= n)
x=x%*%solve(diag(sqrt(apply(x,2,var)
))
return(x)}
-----

```

Así si se quiere centrar los datos con respecto a la media, una vez establecida la "Función Transformaciones", se ejecuta

$Y = \text{Centrar}(Y)$

Otra información importante para realizar un biplot es el porcentaje de variabilidad que recoge cada una de las componentes de la variabilidad total, lo cual se suele llamar inercia absorbida por las componentes, la función que se ha establecido para este fin es la siguiente:

2) Función Inercia

```

-----
inerciarel=function(x)
{z=data.matrix(x)
cat("\n Inercia Absorbida \n")

```

```

SVD=svd(t(z)%*%z)
autos=diag(diag(SVD$d))
autos
sum(autos)
for (i in 1:ncol(z))
{ print(autos[i]/sum(autos)*100)}
}

```

La calidad de representación que ofrecen los planos de representación de los Biplots es otra característica que se debe observar, para ello se ha creado la función "Quality", con ésta se puede tener la calidad de representación tanto para las filas como para las columnas de las matrices de datos de estudio, en el número "neje" se especifica la dimensión de las componentes o la cantidad de las componentes en las cuales se quiere saber su calidad de representación.

3) Función para la calidad de la representación

```

-----
Quality=function(x)
{UDV=svd(x)
r=length(svd(x)$d)
d=diag(UDV$d)[1:r,1:r]
u=UDV$u[,1:r]
v=UDV$v[,1:r]
a=u%*%d
b=v%*%d
sf=p*apply(t(a*a),2,mean)
cf=(solve(diag(sf)))%*%(a*a)*100
cf=round(cf[,1:neje],2)
cat("\n Calidad de Representación de
las Filas \n")

```

```

print(cf)
sc=p*apply(t(b*b),2,mean)
cc=(solve(diag(sc)))*%*(b*b)*100
cc=round(cc[,1:neje],2)
cat("\n Calidad de Representación de
las Columnas \n")
print(cc)
return()}

```

Por último, para elegir el tipo de Biplot clásico de nuestro estudio, usamos la función "BIPLOT", de la cual podemos elegir entre los tres tipos GH-Biplot, JK-Biplot y SQRT- Biplot, como sigue:

4) Función BILOT

```

BILOT=function(x)
{UDV=svd(Y)
u=UDV$u
d=diag(UDV$d)
v=UDV$v
if (tipo ==1)
{print("GH BILOT")
F=u
C=v%*(d)}

```

```

else if (tipo ==2)
{print("JK BILOT")
F=u%*(d)
C=v}
else if (tipo==3)
{print("SQRT BILOT")
F=u%*(d)
C=v}
biplot(F,C, var.axes = TRUE, xlab =
"Comp1",ylab = "Comp2",
main = etiqueta, ylabs=etiqc , xlabs
=etiqc);abline(h=0,v=0)
}

```

Tal como se señaló anteriormente el objetivo de este estudio es analizar datos de la CEPAL por medio de los Biplots clásicos, usando R, usando las funciones explicadas anteriormente, para ello se muestran los resultados del "Índice de productividad del trabajo de América Latina y la Unión Europea" y se divide el estudio en datos en la última década del siglo XX y primera década del siglo XXI (<http://interwp.cepal.org/sisgen/ConsultaIntegrada.asp?idIndicador=1835&idioma=e>).

RESULTADOS

Índice de productividad del trabajo de América Latina y la Unión Europea durante la última década del siglo XX

En la Tabla 1 se manifiesta que el aproximadamente el 95.03% de la variabilidad total del índice de

productividad del trabajo de América Latina y la Unión Europea, en la última década del siglo XX, medido por la CEPAL es explicada por el primer plano factorial.

Tabla 1. Inercia Adsorbida. Índice de productividad del trabajo de América Latina y la Unión Europea. Última década del Siglo XX

Componente	Porcentaje
1	79.83
2	15.20
3	2.70
4	1.24
5	0.51
6	0.28
7	0.12
8	0.066
9	0.048

Mientras que la Tabla 2, establece que los años de estudio están bien representados en este primer plano factorial. La Tabla 3 que indica la calidad de representación de los países, permite observar Brasil e Italia

son los países que no están bien representados en el primer factorial, y, por lo tanto, no se considerarán en el análisis, los demás países guardan una buena calidad de representación.

Tabla 2. Calidad de Representación de las Columnas. Índice de productividad del trabajo de América Latina y la Unión Europea (CEPALSTAT). Última década del Siglo XX

Año	Componente 1 %	Componente 2 %	Componente 3%	Componente 4 %
1991	36.43	54.83	5.19	3.50
1992	70.45	25.45	0.00	3.29
1993	85.96	10.93	1.06	1.56
1994	94.56	1.31	2.09	0.06
1995	91.63	1.19	5.37	0.79
1996	91.03	6.41	1.14	0.71
1997	88.77	9.19	0.16	0.42
1998	84.37	10.90	3.71	0.04
1999	75.29	16.56	5.57	0.78

Tabla 3. Calidad de Representación de las Filas. Índice de productividad del trabajo de América Latina y la Unión Europea. Última década del Siglo XX

País	Comp1 %	Comp2 %	Comp3 %	Comp4 %	País	Comp1 %	Comp2 %	Comp3 %	Comp4 %
ALE	20.87	41.16	25.72	9.87	GUA	51.94	45.10	1.23	0.45
ARG	96.20	1.24	1.61	0.02	HUN	37.35	44.34	8.48	7.16
AUS	34.93	37.21	23.20	0.59	IRL	83.03	1.21	12.20	0.41
BEL	8.91	87.35	0.20	0.29	ITA	15.01	34.15	49.11	1.22
BOL	38.43	47.32	0.00	13.19	LET	90.55	8.11	0.28	0.92
BRA	39.65	2.58	7.02	34.21	LIT	98.85	0.08	1.01	0.02
BUL	8.97	79.71	0.63	0.00	LUX	4.53	88.44	1.92	0.63
CHI	96.13	2.16	0.18	0.41	MAL	97.60	0.10	1.85	0.01
CHE	57.03	4.36	2.16	22.71	MEX	53.63	41.50	2.05	0.79
COL	63.03	3.37	17.93	2.76	PB	60.06	37.66	1.21	0.02
COS	0.62	49.95	12.93	25.89	PER	70.89	17.00	4.94	6.88
DIN	74.63	22.85	0.80	0.62	POL	78.68	18.34	1.58	0.52
ECU	71.12	27.59	0.01	0.18	POR	47.57	38.30	1.47	0.04
ESL	16.07	78.40	0.02	4.82	RU	93.48	3.84	0.00	0.11
ENA	10.91	73.21	13.24	1.77	RCH	91.77	3.75	2.77	1.55
ESP	8.80	69.55	19.69	0.09	RD	71.47	20.64	5.06	0.04
EST	70.60	22.46	6.72	0.01	RUM	64.03	27.95	7.58	0.02
FIN	89.48	7.32	0.91	0.47	SUE	97.07	2.06	0.13	0.13
FRA	26.39	71.14	1.09	0.93	URU	86.23	0.20	11.86	0.58
GRE	9.64	78.15	7.09	3.09	VEN	18.61	78.31	0.29	0.08

En la Figura 2, se muestra la representación Biplot del Índice de productividad del trabajo de América Latina y la Unión Europea, suministrado por la CEPALSTAT, en la última década del Siglo XX, hay países que al ser proyectados perpendicularmente sobre los ejes Biplots, muestran a Venezuela y Bulgaria con niveles altos en el índice de productividad en el año 1991, y que para los años 1992, 1993 a 1994 pasan a niveles medios a moderados hasta llegar al año

1995, cuando comienzan a descender a niveles muy bajos y mantienen este descenso por los siguientes años hasta llegar a finales del siglo XX con los niveles más bajos. Otro grupo de países conformado por Ecuador, México, Grecia, Luxemburgo, Bolivia, España, Guatemala tienen índices de productividad del trabajo moderados en 1991 y pasan a índices bajos a extremadamente bajos en los años siguientes del siglo XX.

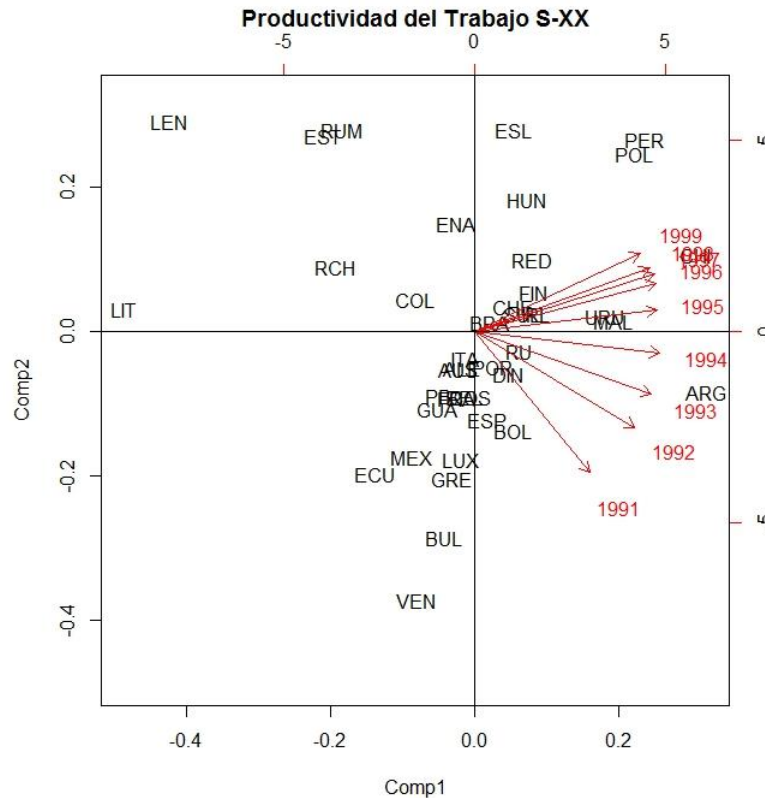


Figura 2: Representación Biplot del Índice de productividad del trabajo de América Latina y la Unión Europea. Última década del Siglo XX

Argentina es el único país que se mantiene muy alto en la productividad del trabajo durante la última década del siglo XX. Luego, se puede observar a Malta y Uruguay que se manifestaron un comportamiento ascendente en el índice de productividad de moderadamente bajo a alto. Finlandia, República Dominicana y Chile, son países que, de tener índices muy bajos de productividad del trabajo en los primeros años de la última década del siglo XX, llegaron a valores medios a partir de 1995, manteniéndose hasta 1999.

El grupo de países conformado por: Estonia, Colombia, República Checa, Rumania, Letonia y Lituania, son países que presentaron los índices de productividad del trabajo en la última década del siglo XX, siendo Lituania y Letonia los países con índices más bajos. Por último, Eslovenia, Hungría, Polonia y Perú, son países que para el año 1991, presentaron índices muy bajos y fueron creciendo con el paso del tiempo, en el caso de Eslovenia y Hungría estos países cerraron con índices medios el año 1999; mientras, que Polonia y Perú alcanzaron los índices más altos de todos los países.

Índice de productividad del trabajo de América Latina y la Unión Europea durante la primera década del siglo XXI

En los siguientes párrafos, se trata el análisis del índice de productividad del trabajo de América Latina y la Unión Europea durante la primera década del

siglo XXI, obsérvese que la Tabla 4, muestra que la inercia absorbida por las dos primeras componentes representa el 98.61% de la variabilidad total; es decir, que este es el mejor plano para la representación de la matriz de datos.

Tabla 4. Inercia Adsorbida. Índice de productividad del trabajo de América Latina y la Unión Europea (CEPALSTAT). Primera década del Siglo XXI

Componente	Porcentaje
1	91.00
2	7.61
3	0.83
4	0.24
5	0.14
6	0.084
7	0.055
8	0.022
9	0.014

La Tabla 2, muestra la calidad de representación de las columnas; es decir de los años de estudio, puede verse que

todos los años están bien representados, en el primer plano factorial.

Tabla 5. Calidad de Representación de las Columnas. Índice de productividad del trabajo de América Latina y la Unión Europea (CEPALSTAT). Primera década del Siglo XXI

Año	Componente 1 %	Componente 2 %	Componente 3 %	Componente 4 %
2000	74.08	23.67	1.93	0.10
2001	87.26	11.98	0.20	0.01
2002	94.99	3.34	0.86	0.52
2003	97.20	0.78	1.60	0.13
2004	98.48	0.09	0.86	0.22
2005	97.24	1.89	0.18	0.51
2006	93.46	6.14	0.02	0.12
2007	89.33	9.89	0.44	0.00
2008	86.98	10.76	1.41	0.51

Tabla 6. Calidad de Representación de las Filas. Índice de productividad del trabajo de América Latina y la Unión Europea (CEPALSTAT). Primera década del Siglo XXI

País	Comp1 %	Comp2 %	Comp3 %	Comp4 %	País	Comp1 %	Comp2 %	Comp3 %	Comp4 %
ALE	95.27	3.96	0.64	0.07	GUA	99.46	0.38	0.02	0.02
ARG	80.35	9.15	8.17	0.00	HUN	99.16	0.54	0.15	0.03
AUS	64.39	27.25	6.67	0.55	IRL	94.98	3.56	1.39	0.00
BEL	94.66	4.11	1.08	0.01	ITA	91.03	8.68	0.23	0.00
BOL	93.11	5.24	0.03	1.06	LET	0.39	95.78	0.07	1.82
BRA	93.92	4.51	0.19	1.08	LIT	61.28	37.69	0.39	0.02
BUL	42.79	45.74	6.02	3.15	LUX	94.45	3.89	0.12	0.65
CHI	86.65	12.85	0.01	0.13	MAL	54.45	42.52	1.09	0.08
CHE	5.78	88.18	0.00	3.43	MEX	99.61	0.33	0.02	0.00
COL	96.45	2.50	0.42	0.19	PB	98.97	0.85	0.09	0.05
COS	98.86	0.12	0.12	0.09	PER	96.34	2.73	0.70	0.07
DIN	35.76	52.99	5.85	4.80	POL	99.58	0.36	0.05	0.00
ECU	99.58	0.15	0.12	0.00	POR	66.29	33.11	0.27	0.07
ESL	95.79	3.19	0.82	0.18	RU	81.21	16.86	0.34	1.21
ENA	98.33	1.37	0.21	0.00	RCH	71.55	27.74	0.07	0.07
ESP	94.05	5.26	0.42	0.22	RD	89.89	0.14	4.00	3.81
EST	93.18	6.32	0.08	0.23	RUM	42.62	55.52	0.58	0.34
FIN	89.34	10.18	0.00	0.08	SUE	92.95	2.04	0.31	3.81
FRA	97.06	2.34	0.53	0.04	URU	64.68	5.90	26.61	0.58
GRE	76.26	13.74	5.88	0.27	VEN	93.05	4.55	1.82	0.27

En la Tabla 6, se puede ver la calidad de representación de los países de estudio, en esta oportunidad se visualiza que todos los países están bien representados en el primer plano factorial.

La Figura 3, muestra la representación Biplot, del índice de productividad del trabajo a comienzos del siglo XXI, se destaca a Polonia como el país con mayor índice a comienzos de este siglo, superando el índice que traía del siglo pasado, luego en positivo le siguen los países de Latinoamérica Perú y Chile, con un comportamiento muy similar, con índice alto para los años 2003 y 2004, y una pequeña caída a índices medios entre

los años 2005 al 2008. Por otro lado, Eslovenia y Estonia, países que cerraron muy bajos en la última década del siglo XX, manifiestan una notable recuperación posicionándose detrás de Polonia como los países europeos con mayor productividad del trabajo. Otro país europeo que presentó una notable recuperación fue Rumania, esta nación pasó de los índices más bajos en la última década del siglo pasado y comienzos del presente a ser de los países europeos junto con Eslovenia y Estonia a índices de productividad del trabajo altos.

Irlanda, República Dominicana, Hungría, son países que se mantienen con índices

medios a lo largo de la primera década del siglo XXI, Bulgaria, Letonia y Bulgaria, muestran una ligera recuperación en los años 2005 al 2008. Por otro lado, es notable la caída de Argentina, después de tener los índices más altos de productividad del trabajo, pasó a estar entre los países más bajos,

junto a Chipre y Malta. Por último, los países que presentan los peores índices en productividad del trabajo son República Checa, Grecia, Italia, Austria, Portugal, México, Costa Rica, Colombia, Brasil, Ecuador y Venezuela, siendo estos dos últimos los más bajos en el índice estudiado.

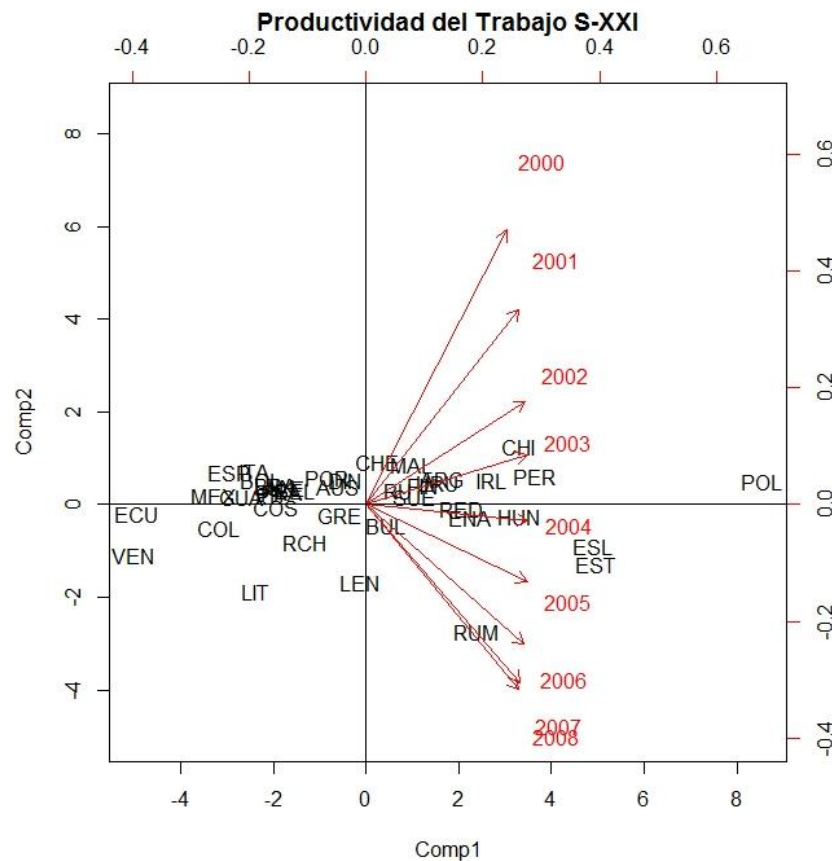


Figura 3: Representación Biplot del Índice de productividad del trabajo de América Latina y la Unión Europea (CEPALSTAT). Primera década del Siglo XXI

CONCLUSIONES

Los métodos Biplots son una herramienta poderosa para la descripción de matrices de datos de gran tamaño, su

implementación con R, permite que muchos investigadores de ingeniería industrial puedan acceder a las bondades de esta herramienta. Para realizar un análisis Biplot adecuado primero debe revisarse la inercia absorbida por las

componentes, la calidad de representación de las filas y las columnas, para luego proyectar los marcadores filas perpendicularmente sobre los ejes Biplot. En el caso de estudio, se ve como países que tenían un alto índice de productividad han decaído a los niveles más bajos, como es el

caso de Argentina. También se observa países como Perú y Polonia que han sabido crecer o mantenerse en la productividad del trabajo. El Biplot es capaz de captar variaciones de mejoras pequeñas como de empeoramiento de los países de estudio.

Referencias

- Acevedo, A. & Linares, M. (2012). El enfoque y rol del ingeniero industrial para la gestión y decisión en el mundo de las organizaciones. *Revista de la Facultad de Ingeniería Industrial*, 15(1), 09-24. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/816/81624969002.pdf>
- Álvarez, W. (2009). *Contribución a la estimación en regresión multivariante con rango reducido utilizando mínimos cuadrados parciales* (Tesis Doctoral). Universidad Central de Venezuela, Caracas.
- Álvarez, W. & García, T. (2008). Representación de la retención de humedad en los Suelos mediante el Biplot de regresión con rango reducido. *Revista Ingeniería UC*, 15(1), 28-37. Recuperado de <http://servicio.bc.uc.edu.ve/ingenieria/revista/a15n1/15-1-3.pdf>
- Álvarez, W. & Cárdenas, O. (2010). Un enfoque basado en la descomposición en valores singulares generalizada para el biplot de coeficientes de regresión. *Ingeniería Industrial, Actualidad y Nuevas Tendencias*, 2(4), 65-74. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=215014949005>
- Arciniegas, J. & Mejías A. (2017). Perception of the quality of services provided by the Military University of Granada based on the Servqualing scale, with factorial analysis and multiple regression. *Comunicación*, 8(1), 26-36. Recuperado de <http://www.scielo.org.pe/pdf/comunica/v8n1/a03v8n1.pdf>
- Benzecri, J. (1982). *L'analyse des données*. Tomo II: L'analyse des correspondances. Paris. Dunod.
- Cárdenas, O.; Galindo, J. & Vicente-Villardón (2007). Los métodos Biplot: evolución y aplicaciones. *Revista Venezolana de Análisis de Coyuntura*, 13(1), 279-303. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/364/36413113.pdf>
- Cárdenas, O. & Galindo, P. (2004). *Biplot con Información Externa basado en Modelos Lineales Generalizados*. Caracas: Ediciones del CDCH-UCV.
- Galindo, M. (1985). *Contribuciones a la representación simultánea de datos multidimensionales* (Tesis Doctoral). Universidad de Salamanca, España.
- Galindo, M. (1986). Una alternativa a la representación simultánea: HJ-Biplot. *Questiio*, 10(1), 13-23. Recuperado de: <http://www.raco.cat/index.php/Questiio/articloe/view/26468/26302>
- Gabriel, K. R. (1971). The Biplot-graphic display of matrices with applications to principal component analysis. *Biometrika*, 58(3), 453-467. DOI: <http://dx.doi.org/10.1093/biomet/58.3.453>

- García, T.; Montero, C.; Ruiz, V.; Vásquez, M. & Álvarez, W. (2008). Aplicación de la regresión logística multinomial en la detección de factores económicos que influyen la productividad de los sectores industriales. *Revista Ingeniería UC*, 15(3), 19-24. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/707/70712293003.pdf>
- Hall, R. & Jones, C. (1999). Why some countries produce so much more output per worker than others? *Quarterly Journal of Economics*, 114(1), 83-116. DOI: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3595>
- Householder, A. & Young, G. (1938). Matrix approximation and Latent Roots. *American Mathematics Monthly*, 45,165 -171.
- Mejías A. (2005). Modelo para medir la calidad del servicio en los estudios universitarios de postgrado. *Universidad, Ciencia y Tecnología*, 9(34), 81-85. Recuperado de: http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-48212005000200004&lng=es&nrm=iso&tlng=es
- Mejías, A.; Calderón, H. & Contreras, C. (2017). Evaluación de la calidad de servicio en un grupo farmacéutico en Venezuela. *Revista Ingeniería Industrial*, 15(3), 253-266. Recuperado de: <http://revistas.ubiobio.cl/index.php/RI/article/view/2944/3008>
- Mulder, N.; Pascual, I. & González, R. (2016). Análisis del Crecimiento de la Productividad en Costa Rica, 2001-2015. *Vigesimosegundo informe estado de la nación en desarrollo humano sostenible (2015)*. San José, Costa Rica: Estado de la Nación.
- Peña, D. (2002). *Análisis de Datos Multivariantes*. Madrid: McGraw-Hill.
- Torres, R. & López, E. (2014). *Desarrollo y empleo en América Latina y el Caribe: Una mirada hacia el futuro*. Ginebra: Organización Internacional del Trabajo.
- Vicente-Villardón, J. (1992). *Una alternativa a las técnicas factoriales clásicas basada en una generalización de los métodos Biplot* (Tesis Doctoral). Universidad de Salamanca, España.

Autor

Willin Gabriel Álvarez Irausquin. Lic. en Educación, mención Matemática, Universidad de Carabobo; Magister en Estadística, Doctor en Estadística, Universidad Central de Venezuela. Docente-Investigador Dpto. de Matemáticas de la Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo (UC), Venezuela/Universidad Regional de los Andes (UNIANDES), Ecuador.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6831-4300>

Email: willingabriel@gmail.com; wlavarez@uc.edu.ve

Recibido: 23-06-2017

Aceptado: 11-12-2017